Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţenă şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A XII-A – SOLUŢII şi BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0,1] \to (0,\infty)$ funcţii continue şi σ o permutare a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$. Să se demonstreze că

$$\prod_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x \geq \prod_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Întrucât $f_i(x) > 0$ pentru $x \in [0,1]$, $i = 1,2,\ldots,n$, conform inegalităţii Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_0^1 \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)}(x)}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 f_{\sigma(i)}(x)\,\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

pentru fiecare $i = 1,2,\ldots,n$. Făcând produsul tuturor acestor inegalităţi, obţinem relaţia din enunţ. .... 7 puncte

Observaţie. Tratarea completă a cazului $n = 2$ va fi punctată cu 5 puncte. Considerarea cazului discret (sume) va fi punctata corespunzător cu maximum 5 puncte dacă nu se face trecerea la limită cu sumele Riemann.

Problema 2. Fie $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid |\det(A)| = 1\}$ şi $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$. Să se arate că G şi H înzestrate cu operaţia de înmulţire a matricilor sunt grupuri neizomorfe.

Soluţie. Este evident că G şi H înzestrate cu operaţia de înmulţire a matricelor sunt grupuri (verificare!). .... 1 punct

Dacă grupurile G şi H ar fi izomorfe, atunci ecuaţia $X^2 = I_2$ ar trebui să aibă acelaşi număr de soluţii atât în G, cât şi în H. 2 puncte

Conform teoremei lui Cayley, această ecuaţie are exact două soluţii în H: $\pm I_2$ .... 2 puncte

Întrucât ecuaţia are soluţii şi în $G \setminus H$, e.g.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}^*$$

rezultă că grupurile G şi H nu sunt izomorfe..............2 puncte.

Problema 3. Fie A un inel comutativ finit, cu cel puţin două elemente. Arătaţi că oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$, există un polinom $f \in A[X]$, de gradul n, care nu are nici o rădăcină în A.

Soluţie. Funcţia $\varphi : A \to A$, $\varphi(x) = x^n - x$, nu este injectivă: $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ .... 3 puncte

Întrucât A este finit, rezultă că φ nu este surjectivă..... 2 puncte

Deci există $a \in A \setminus Im\varphi$. Prin urmare polinomul $f = X^n - X - a$ nu are nici o rădăcină în A................................2 puncte

Problema 4. Fie $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,\infty) \mid f \text{ continuă}\}$ şi n un număr natural, $n \geq 2$. Determinaţi cea mai mică constantă reală c, astfel încât

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x \leq c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

pentru orice $f \in \mathcal{F}$.

Soluţie. Cu substituţia $\sqrt[n]{x} = t$ avem $\displaystyle\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x = n\int_0^1 t^{n-1}f(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, de unde $c \leq n$ .... 3 puncte

Pentru $p > 0$, funcţia $f_p : [0,1] \to [0,1]$, $f_p(x) = x^p$, aparţine mulţimii $\mathcal{F}$...2 puncte

$\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{p}{n}}\mathrm{d}x \leq c\int_0^1 x^p\mathrm{d}x$ implică $\dfrac{n}{n+p} \leq \dfrac{c}{p+1}$, de unde $c \geq \dfrac{pn+n}{p+n}$ .... 1 punct

Prin trecere la limită în ultima inegalitate, avem $c \geq \displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{pn+n}{p+n} = n$, adică $c \geq n$. În concluzie $c = n$. ....1 punct.